

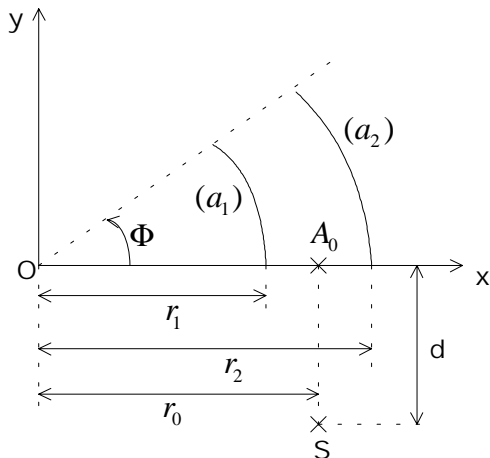
MECANIQUE DU POINT MATERIEL

EXERCICE D' ORAL

-EXERCICE 13.6-

• ENONCE :

« Focalisation de particules par une lentille électrostatique »



Des particules non-relativistes de charge q sont émises par une source (S) : l'enclente étant supposée à l'équilibre thermique, toutes les particules ont la même énergie cinétique. Les trajectoires étudiées sont situées dans le plan xOy ci-contre.

Les particules sont classées en 4 types:

type P_0 : masse m_0 , vitesse initiale de norme v_0 , dirigée suivant Oy .

type P_0' : masse m_0 , vitesse initiale de norme v_0 , faisant un angle α très petit avec Oy .

type P_1 : masse m_1 , vitesse initiale de norme v_1 , dirigée suivant Oy .

type P_1' : masse m_1 , vitesse initiale de norme v_1 , faisant un angle α très petit avec Oy .

• Par analogie avec l'optique géométrique, on va réaliser un dispositif permettant de faire converger toutes ces particules en un point (S'), conjugué de (S) par ce dispositif, appelé « lentille électrostatique » : ceci n'est possible que pour des particules ayant des vitesses initiales peu inclinées par rapport à l'axe Oy , condition équivalente à l'Approximation de Gauss.

• Le système est constitué d'un secteur de condensateur cylindrique d'angle d'ouverture Φ ; l'armature interne (a_1), de rayon r_1 , est au potentiel nul, tandis que l'armature externe (a_2), de rayon r_2 , est au potentiel $U > 0$. La hauteur h (selon l'axe Oz) du condensateur est très supérieure à r_2 ; par ailleurs, on pose : $r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2}$ et $\Delta r = r_2 - r_1$.

1) En négligeant les effets de bord, déterminer la topologie du champ électrique \vec{E} entre les armatures.

2) En notant E_0 la valeur algébrique du champ électrique à la distance r_0 du point O, exprimer la valeur algébrique du champ en un point M situé entre les armatures à la distance r du point O, ceci en fonction de r, r_0 et E_0 .

Exprimer ce champ en fonction de U, r, r_1 et r_2 .

3) Donner l'expression de U pour qu'une particule de type (P_0) suive dans le condensateur une trajectoire circulaire de centre O et de rayon r_0 (dans la suite du problème, U **conservera cette expression**).

Que devient cette expression pour $\Delta r \ll r_0$?

4) Quelle est la trajectoire d'une particule de type (P_1) ?

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

EXERCICE D' ORAL

• On veut étudier la trajectoire d'une particule de type (P_0) , ou (P_1) entre les armatures ; cette particule pénètre dans le condensateur au point (A_0) .

La position de la particule est repérée en coordonnées polaires d'origine O et d'axe polaire Ox ; l'origine des temps est prise à l'instant où la particule est en (A_0) .

5) Ecrire les équations différentielles régissant le mouvement de la particule dans le condensateur.

6) On pose : $r(t) = r_0[1 + \varepsilon(t)]$, avec $|\varepsilon(t)| \ll 1$; à partir d'un développement limité au 1^{er} ordre en α et ε (considérés comme des infiniment petits du même ordre), écrire l'équation différentielle régissant $\varepsilon(t)$.

En déduire l'expression de $\varepsilon(t)$ (on pourra constater que α et ε sont bien du même ordre).

7) En déduire l'expression de l'angle polaire $\theta(t)$, que l'on mettra sous la forme :

$$\theta(t) = at + \alpha[bt + c(1 - \cos \omega t)]$$

Quel est l'intérêt de cette mise en forme ?

• On étudie la convergence du faisceau de particules en sortie du condensateur ; les trajectoires en sortie sont des droites (D_α) dépendant de α , (D_0) étant celle obtenue pour $\alpha = 0$: (D_0) et (D_α) se coupent au point (S') , à une distance d' du plan de sortie du condensateur.

8) Compte tenu des approximations précédentes, calculer en fonction de α, r_0, d, v_0 et Φ :

♦ l'instant t_1 de sortie d'une particule entrée à l'instant 0 dans le condensateur (on justifiera le fait que l'on peut se contenter d'une expression de t_1 à l'ordre 0).

♦ la distance de sortie $r(t_1)$.

♦ les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse de sortie.

9) En déduire l'expression de d' ; en conclure que le dispositif permet effectivement la convergence du faisceau pour un angle Φ supérieur à une valeur que l'on précisera.

Dans quel cas obtient-on un faisceau parallèle en sortie ?

Rq1 : pour les étudiants n'ayant pas encore abordé l'électrostatique, on donne les résultats des deux premières questions, soit :

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r, \text{ avec } E(r) < 0 \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\frac{U}{\text{Ln}(r_2/r_1)} \times \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

Rq2 : cet exercice est inspiré d'un problème de concours, et est bien sûr trop long pour être posé entièrement à l'oral.

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

EXERCICE D'ORAL

• CORRIGE :

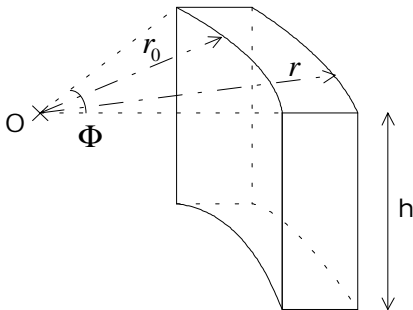
« Focalisation de particules par une lentille électrostatique »

1) Négliger les effets de bord revient à considérer une structure « idéalisée » : un condensateur cylindrique illimité.

On retrouve alors l'invariance cylindrique (par rotation et translation le long de l'axe Oz) \Rightarrow le champ ne dépendra que de r ; de plus, les plans (\vec{e}_z, \vec{e}_r) et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ sont plans de symétrie de la distribution de charges \Rightarrow le champ est radial.

En résumé, on a : $\boxed{\vec{E} = E(r)\vec{e}_r}$ avec $E(r) < 0$, compte tenu du signe de U.

2) Le champ étant à forte symétrie, on applique le théorème de Gauss ; il faut trouver une surface telle que le produit scalaire $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ soit simple à calculer, d'où :



Cette surface fermée est constituée de 4 faces planes, sur lesquelles $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$, et de 2 faces courbées sur lesquelles le champ électrique et l'élément de surface sont colinéaires. De plus, sur chacune de ces faces, le champ a un module constant, ce qui va simplifier le calcul. Finalement, on peut écrire :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{planes}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{courbes}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0 \quad (\text{il n'y a pas de charges entre les armatures})$$

\Rightarrow compte tenu de $\iint_{S_{\text{planes}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$, il vient :

$$\iint_{S_{\text{courbes}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{rayon } r}} E(r)\vec{e}_r \cdot dS\vec{e}_r + \iint_{S_{\text{rayon } r_0}} E_0\vec{e}_r \cdot dS(-\vec{e}_r) = 0 = \iint_{S_{\text{rayon } r}} E(r) \times dS - \iint_{S_{\text{rayon } r_0}} E_0 \times dS$$

(pour appliquer le théorème de Gauss, les surfaces doivent être orientées vers l'extérieur)

$$\Rightarrow E(r) \times \iint_{S_{\text{rayon } r}} dS - E_0 \times \iint_{S_{\text{rayon } r_0}} dS = E(r) \times r\Phi h - E_0 \times r_0\Phi h = 0 \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{r_0 E_0}{r}}$$

Rq : en seconde année, on postulera l'équation locale de « Maxwell-Gauss » (à partir de laquelle on peut établir le théorème de Gauss), à savoir :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (\text{dans le vide inter-armatures}) \Rightarrow \text{pour un champ de la forme } \vec{E} = E(r)\vec{e}_r \text{ et en}$$

utilisant l'expression de l'opérateur « divergence » en coordonnées cylindriques, on obtient :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \times \frac{d}{dr} [rE(r)] = 0 \Rightarrow rE(r) = \text{cste} = r_0 E_0 \Rightarrow \text{on retrouve bien } E(r) = \frac{r_0 E_0}{r}.$$

• Pour faire apparaître le potentiel U, il faut faire circuler le champ \vec{E} de l'armature (a_1) à l'armature (a_2), d'où :

$$\int_{a_1}^{a_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{a_1}^{a_2} \overline{\text{grad} V} \cdot d\vec{l} = - \int_{a_1}^{a_2} dV = -[V(a_2) - V(a_1)] = -U = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r_0 E_0}{r} \vec{e}_r \cdot d\vec{l} = r_0 E_0 \times \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

EXERCICE D'ORAL

$$\Rightarrow -U = r_0 E_0 \times \text{Ln}(r_2/r_1) \Rightarrow r_0 E_0 = -\frac{U}{\text{Ln}(r_2/r_1)} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{U}{\text{Ln}(r_2/r_1)} \times \frac{1}{r} \vec{e}_r}$$

3) On applique le PFD à la particule (dans le référentiel d'étude supposé galiléen), en négligeant l'effet de la pesanteur ; pour un mouvement circulaire et à force centrale, il est particulièrement commode de projeter ce PFD sur la base de Frenet :

$m_0 \vec{a} = q \vec{E} = q E(r) \vec{e}_r$ (la force passe effectivement par le point fixe O) \Rightarrow il vient alors :

♦ sur \vec{n} (vecteur normal) : $-m_0 \frac{v^2}{r_0} = -\frac{qU}{r_0 \times \text{Ln}(r_2/r_1)}$ (attention, $\vec{n} = -\vec{e}_r$!)

♦ sur $\vec{\tau}$ (vecteur tangent) : $m_0 \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v(t) = \text{cste} = v_0$ (on a une T.R.U entre S et A_0)

D'où :

$$\boxed{U = \frac{m_0 v_0^2}{q} \times \text{Ln}(r_2/r_1)}$$

• On peut écrire : $r_2 = r_0 + \frac{\Delta r}{2}$ et $r_1 = r_0 - \frac{\Delta r}{2} \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{1 + \frac{\Delta r}{2r_0}}{1 - \frac{\Delta r}{2r_0}} \Rightarrow \text{Ln}(r_2/r_1) \approx 1 + \frac{\Delta r}{2r_0} - \left(1 - \frac{\Delta r}{2r_0}\right) = \frac{\Delta r}{r_0}$

\Rightarrow l'expression approchée de la tension est :

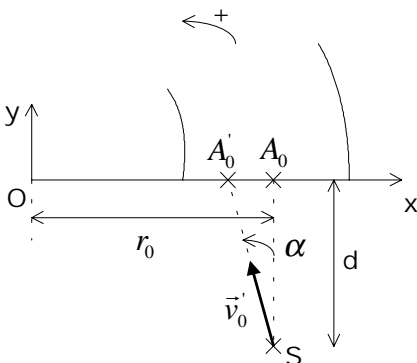
$$\boxed{U \approx \frac{m_0 v_0^2}{q} \times \frac{\Delta r}{r_0}}$$

4) On sait que les particules ont toutes la même énergie cinétique $\Rightarrow m_0 v_0^2 = m_1 v_1^2 \Rightarrow$ les particules de type (P_1) **suivent également un cercle** de centre O et de rayon r_0 (c'est la même valeur de la tension U qui permet de réaliser cette trajectoire).

5) Le mouvement étant à force centrale, on sait qu'il y a conservation du moment cinétique (voir le chapitre 15) ; rappelons ce résultat :

$$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{OM} \wedge \vec{v}) = \frac{d\overline{OM}}{dt} \wedge \vec{v} + \overline{OM} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \wedge \vec{v} + \overline{OM} \wedge \vec{a} = \vec{0} \quad (\overline{OM} \parallel \vec{a}) \Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_0 = \text{cste}}$$

• Calculons le moment cinétique à $t=0$, c'est-à-dire lorsque la particule est en A_0' :



Remarque préliminaire : il est préférable de faire des schémas avec des angles petits et **positifs**; les risques d'erreurs de signe sont plus faibles, les relations obtenues devant malgré tout être **algébriques**.

Par ailleurs, le vecteur vitesse initiale \vec{v}_0' a toujours v_0 pour module.

MECANIQUE DU POINT MATERIEL
EXERCICE D'ORAL

On a donc : $\vec{\sigma}_0(t) = \vec{\sigma}_0(0) = m_0 \overrightarrow{OA_0'} \wedge \vec{v}_0' = m_0 \begin{pmatrix} r_0 - d \tan \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -v_0 \sin \alpha \\ v_0 \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = m_0 v_0 (r_0 \cos \alpha - d \sin \alpha) \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_0(t) = m_0 r \vec{e}_r \wedge \left(\frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \right) = m_0 r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z = \vec{\sigma}_0(0) \Rightarrow \boxed{r^2 \frac{d\theta}{dt} = v_0 (r_0 \cos \alpha - d \sin \alpha)} \quad (1)$$

• Par ailleurs, le PFD appliqué à la particule et projeté sur le vecteur \vec{e}_r de la base cylindrique fournit :

$$m_0 a_r = m_0 \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = qE(r) = -\frac{qU}{r \times \text{Ln}(r_2 / r_1)} = -\frac{m_0 v_0^2}{r} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{v_0^2}{r}} \quad (2)$$

6) On constate que si on élimine $\frac{d\theta}{dt}$ entre les équations (1) et (2), on obtient une équation différentielle en r **non linéaire** (et qui n'a pas de solutions analytiques) ; la méthode proposée permet de **linéariser** cette équation, ce qui n'a d'intérêt pratique que pour $\alpha \ll 1$.

Dans ce cas, la relation (1) fournit au 1^{er} ordre en α :

$$\frac{d\theta}{dt} \approx \frac{v_0}{r^2} (r_0 - d\alpha) = \frac{v_0 r_0}{r^2} \left(1 - \frac{d\alpha}{r_0} \right) \quad (3) \Rightarrow \text{on reporte dans l'équation (2) :$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{v_0^2 r_0^2}{r^3} \left(1 - \frac{d\alpha}{r_0} \right)^2 = -\frac{v_0^2}{r} \Rightarrow \text{au 1^{er} ordre en } \alpha : \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{v_0^2 r_0^2}{r^3} \left(1 - \frac{2d\alpha}{r_0} \right) = -\frac{v_0^2}{r}$$

• Rappelons qu'au 1^{er} ordre en ε , on a : $r^{-3} = [r_0(1+\varepsilon)]^{-3} \approx \frac{1-3\varepsilon}{r_0^3}$, et $r^{-1} = \frac{1-\varepsilon}{r_0}$; d'où :

$$r_0 \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} - \frac{v_0^2}{r_0} \left(1 - \frac{2d\alpha}{r_0} \right) (1-3\varepsilon) = -\frac{v_0^2}{r_0} (1-\varepsilon) \approx r_0 \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} - \frac{v_0^2}{r_0} \left(1 - \frac{2d\alpha}{r_0} - 3\varepsilon \right) \quad (\text{le terme en } \alpha\varepsilon \text{ est du}$$

second ordre) ; après simplifications et division par r_0 , on aboutit à :

$$\boxed{\frac{d^2 \varepsilon(t)}{dt^2} + \frac{2v_0^2}{r_0^2} \varepsilon(t) = -\frac{2v_0^2 d\alpha}{r_0^3}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t - \frac{d\alpha}{r_0}} \quad \text{avec : } \boxed{\omega = \sqrt{2} \times \frac{v_0}{r_0}}$$

• Les conditions initiales fournissent :

$$\diamond r(0) = OA_0' = r_0 - d\alpha = r_0 \left(1 - \frac{d\alpha}{r_0} \right) \Rightarrow \varepsilon(0) = -\frac{d\alpha}{r_0} = A - \frac{d\alpha}{r_0} \Rightarrow \boxed{A=0}$$

$$\diamond \frac{dr}{dt}(0) = v_x(0) = -v_0 \sin \alpha \approx -v_0 \alpha \quad (\text{à } t=0, \vec{e}_r = \vec{e}_x) \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt}(0) = -\frac{v_0 \alpha}{r_0} = \omega B = \sqrt{2} \times \frac{v_0}{r_0} B \Rightarrow$$

$$\boxed{B = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} \quad \text{On en déduit : } \boxed{\varepsilon(t) = -\alpha \left(\frac{d}{r_0} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sin \omega t \right)} \quad (4)$$

Rq : α et $\varepsilon(t)$ sont bien des infiniment petits du même ordre.

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

EXERCICE D' ORAL

7) On reprend l'expression (3) :

$$\frac{d\theta}{dt} \approx \frac{v_0 r_0}{r^2} \left(1 - \frac{d\alpha}{r_0}\right) = \frac{v_0}{r_0} \left(1 - \frac{d\alpha}{r_0}\right) (1 - 2\varepsilon) \approx \frac{v_0}{r_0} \left(1 - \frac{d\alpha}{r_0} - 2\varepsilon\right) = \frac{v_0}{r_0} \left(1 + \frac{d\alpha}{r_0} + \sqrt{2}\alpha \sin \omega t\right) \Rightarrow$$

$$\theta(t) - \theta(0) = \frac{v_0}{r_0} \left(1 + \frac{d\alpha}{r_0}\right) t + \sqrt{2} \frac{v_0}{r_0} \times \frac{\alpha}{\omega} [-\cos \omega t]_0^t \Rightarrow \text{en tenant compte de } \theta(0) = 0, \text{ il vient :}$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{r_0} t + \alpha \left(\frac{v_0 d}{r_0^2} \times t + 1 - \cos \omega t \right)} \quad (5) \quad \text{avec :} \quad \boxed{\omega = \sqrt{2} \times \frac{v_0}{r_0}}$$

Rq : l'expression précédente met en évidence le terme correctif du 1^{er} ordre en α ; en effet, pour $\alpha = 0$, la question 3) montre que $v(t) = cste = v_0 = r_0 \times \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow$ on a bien $\theta(t) = \frac{v_0}{r_0} \times t$.

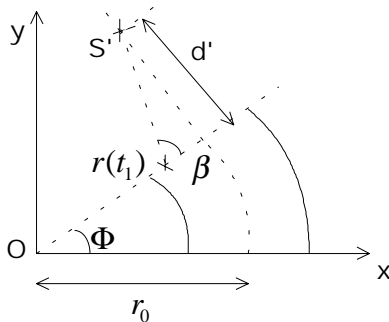
8) L'instant de sortie t_1 est défini par $\theta(t_1) = \Phi$, mais la relation (5) ne permet pas d'écrire t_1 de façon analytique ; cependant, la valeur t_1 est destinée à être reportée dans l'expression (4), où le terme en $\sin \omega t_1$ est multiplié par α , terme du 1^{er} ordre : il suffit donc d'exprimer t_1 à l'ordre 0 (tenir compte d'un terme d'ordre 1 conduirait à un terme d'ordre 2 pour $\varepsilon(t)$, ce qui serait d'une précision illusoire puisque les termes d'ordre 2 ont été négligés jusqu'ici). On a donc :

$$\boxed{t_1 = \frac{r_0 \Phi}{v_0}} \Rightarrow \varepsilon(t_1) = -\alpha \left[\frac{d}{r_0} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sin \left(\sqrt{2} \times \frac{v_0}{r_0} \times \frac{r_0 \Phi}{v_0} \right) \right] \Rightarrow \boxed{r(t_1) = r_0 \left[1 - \frac{d\alpha}{r_0} - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \times \sin(\sqrt{2}\Phi) \right]}$$

• Par ailleurs, les calculs fournissent :

$$\boxed{\frac{dr}{dt}(t_1) = -\alpha v_0 \cos(\sqrt{2}\Phi)} \quad \text{et} \quad \boxed{r \frac{d\theta}{dt}(t_1) = v_0 \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\Phi) \right)}$$

9)



Nous allons calculer l'angle β de 2 manières différentes; tout d'abord:

$$\tan \beta = \frac{d'}{r_0 - r(t_1)} = \frac{d'}{\alpha d + \frac{\alpha r_0}{\sqrt{2}} \times \sin(\sqrt{2}\Phi)}$$

• D'autre part, en sortie du condensateur, le mouvement est une translation rectiligne uniforme \Rightarrow les distances parcourues radialement et orthoradialement sont proportionnelles aux vitesses radiale et orthoradiale de sortie (en $t = t_1$) ; on a donc également :

$$\tan \beta = \frac{r \frac{d\theta}{dt}(t_1)}{\frac{dr}{dt}(t_1)} = \frac{v_0 \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\Phi) \right)}{\alpha v_0 \cos(\sqrt{2}\Phi)} = \frac{d'}{\alpha \left(d + \frac{r_0}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\Phi) \right)} \Rightarrow \boxed{d' \approx \frac{d + \frac{r_0}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\Phi)}{\cos(\sqrt{2}\Phi)}}$$

Rq : d' est donc sensiblement indépendant des variations de l'angle α

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

EXERCICE D' ORAL

- Le dispositif permet effectivement de focaliser le faisceau de particules au point (S'), conjugué de la source (S), si la distance d' est **positive** \Rightarrow il faut que :

$$\cos(\sqrt{2}\Phi) < 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi > \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$

- On obtient un faisceau parallèle en sortie lorsque le point (S') est rejeté à l'infini, c'est-à-dire pour :

$$\boxed{\Phi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$